$\sqrt{4\pi^2 + 1/4}$ ausgezeichnet sein könnte; aber die Zahl $411 = 3 \cdot 137$ paßt vorzüglich hierher, denn sie ist gerade bis auf einen Faktor 2 das Verhältnis von $\hbar$ und der Konstanten der Strahlungskraft $\frac{2}{3}\frac{e^2}{c}$, die in allen vorangehenden Arbeiten des Verf. offen oder latent war, weil sich nur mit ihrer Hilfe die Strahlungskraft in eine reine *Quantenmechanik* einfügen läßt. Der Wert $I = 0$ ließe auf Bose-Statistik schließen.

Eine eingehendere Diskussion ist wohl im Augenblick wegen der Unsicherheit der Massenbestimmungen sowohl wie der vorliegenden Theorie nicht angebracht. Es sei nur erwähnt, daß wir auch einige Eigenwerte für $I = 1/2$ direkt aus der Differentialgleichung (20) bestimmt haben. In diesem Falle gibt es gerade und ungerade Eigenfunktionen. Das Ergebnis zeigt Tab. 2 in Vielfachen von m_e. Die theoretische Ungenauigkeit ist etwa 4%, hauptsächlich wegen der Unsicherheit der Operatordarstellung. Die beiden letzten Werte sind geschätzt.

gerade	ungerade
$m_1 = 184$	$m_2 = 225$
$m_3 = 318$	$m_4 = 332$
$m_5 \lesssim 380$	$m_6 = 380$.

Tab. 2.

Der erste Wert liegt sehr tief. Es wäre von Interesse, ob man diese Möglichkeit schon sicher ausschließen kann. Eine obere Grenze des diskreten Mesonenspektrums bei $411\, m_e$ kann wohl als recht wahrscheinlich gelten.

Feldmechanische Begründung der Diracschen Wellengleichung

Von Fritz Bopp

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität München

(Z. Naturforschg. **3 a**, 564—573 [1948]; eingegangen am 31. Juli 1948)

Wenn man die Trägheitskraft des Elektrons aus einer verallgemeinerten linearen Elektrodynamik ableitet und dabei in der Entwicklung nach der Retardierung einen Schritt weiter geht als Lorentz, so erhält man eine Bewegungsgleichung, auf die m. W. Hönl und Papapetrou erstmalig hingewiesen haben. Darin wird zwischen dem Makroimpuls des Teilchens und seiner Mikrogeschwindigkeit unterschieden. Infolge von Emissions-Reabsorptionsprozessen verschiebt sich ständig der Energiemittelpunkt gegenüber dem Ladungsmittelpunkt, was zu einer Zitterbewegung führt, die ein spinartiges Zusatzmoment ergibt. Im folgenden wird gezeigt, daß dieses Zusatzmoment bei wohldefinierter Modifikation der Maxwellschen Gleichungen mit dem Elektronenspin identisch ist. Die Quantisierung der Bewegungsgleichung liefert in diesem Falle eine Wellengleichung, deren Lösungen auch die der Diracschen Wellengleichung enthalten. Die Diracsche Wellengleichung hängt also eng mit der Elektronenstruktur zusammen.

1. Entwicklung des Problems

Dirac[1] hat die Maxwellschen Potentiale für eine bewegte Punktladung in folgender Form dargestellt. Seien $(x_\alpha) = (\mathfrak{r}, ict)$ die Koordinaten des Aufpunktes und $[z_\alpha(s)] = [\mathfrak{r}_0(s), ic\,t_0(s)]$ mit $\dot{z}_\mu^2 = -c^2$ die der Bahnkurve einer Punktladung $+e$, dann lauten die retardierten Potentiale:

$$\varphi_\mu(x) = \frac{2e}{c^2} \int_{\text{ret}} \dot{z}_\mu(s)\, f(\sigma)\, ds\,. \tag{1}$$

Darin bedeutet σ das Quadrat des Abstandvektors $[x_\alpha - z_\alpha(s)]$:

$$\sigma = \frac{1}{c^2}(x_\alpha - z_\alpha(s))^2, \tag{2}$$

und die Integration (ret) ist über alle Punkte der Bahnkurve im Kegel vor x zu erstrecken. Für die Maxwellsche Theorie gilt speziell

$$f_{\mathrm{M}}(\sigma) = \delta(\sigma)\,. \tag{3}$$

Darin ist δ die Diracsche Punktfunktion.

Bekanntlich führt dieser Ansatz zu einer unendlichen Ruhmasse der Punktladung. Die ge-

[1] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **167**, 148 [1938]; M. H. L. Pryce, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **168**, 389 [1938].

wöhnliche, in der erwähnten Arbeit von Dirac besonders betonte Abwandlung der Bewegungsgleichung besteht in der Annahme, daß sich die Wechselwirkung zwischen geladenen Teilchen nach der Maxwellschen Theorie berechne, daß man aber für die Ruhmasse einen endlichen Wert einzusetzen habe. Man kann dies durch Abänderung des Ansatzes in Gl. (3) beschreiben[2]. Das Diracsche Modell folgt aus

$$f_{\mathrm{D}}(\sigma) = \frac{m_0 c^3}{e^2}\,\delta(\sqrt{-\sigma}) - \frac{1}{2}\,\delta'(\sqrt{-\sigma})\,. \quad (4)$$

Das zweite Glied allein liefert, wenn man will, die Basis für Heitlers Theorie der Strahlungsdämpfung, in der die Feldselbstenergie 0 gesetzt wird. Hönl und Papapetrou[3] haben 1939, von ganz anderen Überlegungen herkommend, das aus dem Ansatz

$$f_{\mathrm{HP}}(\sigma) = \frac{m_0 c^3}{e^2}\,\delta(\sqrt{-\sigma}) - \frac{1}{2}\,\delta'(\sqrt{-\sigma}) + k\,\delta''(\sqrt{-\sigma}) \quad (5)$$

folgende Modell studiert[4]. Der Ansatz

$$f_{\mathrm{mult}}(\sigma) = \frac{\gamma}{2}\,\frac{J_1(\gamma\sqrt{-\sigma})}{\sqrt{-\sigma}}\,, \quad (6)$$

der eine Yukawa-artige Modifikation des Coulomb-Potentials $[\varphi = \frac{e}{r}\,(1 - e^{-\varkappa r})]$ liefert, ist inzwischen von zahlreichen Autoren untersucht worden[5–8]. R. P. Feynman[9] betrachtet neuerdings den Ansatz

$$f_{\mathrm{F}}(\sigma) = \frac{a^2}{2}\,e^{-a\sqrt{-\sigma}}. \quad (7)$$

Alle oben angegebenen Abwandlungen des Maxwellschen Ansatzes $f = \delta(\sigma)$ garantieren die Endlichkeit der Ruhmasse. Die Forderung endlicher Masse reicht also zur Bestimmung der das Potential erzeugenden Funktion $f(\sigma)$ nicht aus. Eine weitere Einengung der Möglichkeiten ergibt sich aus dem Wessel[10]-Diracschen[1] Paradoxon (vgl. Bopp[2,11]). Wenn ein Elektron ein Kraftfeld passiert, so wird es beschleunigt. Die damit verbundene Deformation des Feldes führt zu einer Abänderung der Teilchenmasse. (Die Beschleunigungsabhängigkeit der Masse ist ja jetzt durch die Radiospektroskopie auch experimentell sichergestellt.) Nach dem Austritt aus dem Kraftfeld geht die Feldänderung jedenfalls nicht sofort zurück. Sie braucht überhaupt nicht dem alten Gleichgewicht zuzustreben, und tut es auch nicht im Falle der Ansätze in den Gln. (4) und (5). Beidemal erhält man die von Wessel und Dirac und neuerdings auch von Hönl[12] diskutierte Selbstbeschleunigung[13] auf Lichtgeschwindigkeit. Hönl versucht diese Selbstbeschleunigung korrespondenzmäßig mit der begrenzten Lebensdauer instabiler Teilchen zu verbinden. Für stabile Teilchen muß man fordern, daß das Eigenfeld der Teilchen nach dem Verschwinden äußerer Kräfte in den alten Gleichgewichtszustand zurückkehrt. Nach Bopp[2,11] und Landé[7] trifft das z. B. für den Ansatz in Gl. (6) zu.

Quantitative Fortschritte zur Bestimmung der erzeugenden Funktion $f(\sigma)$ sind von der Forderung nach *Massenstabilität* allein ebensowenig zu erwarten wie von der einer endlichen Ruhenergie. In der Diracschen Wellengleichung (und erst recht in den heute zu erwartenden Modifikationen) stecken jedoch implizit quantitative Strukturaussagen, die bis jetzt feldtheoretisch noch nicht ausgeschöpft sind. Wenn es gelingt, den Elektronenspin aus den Eigenschaften des Feldes abzuleiten, sollte dies zu einer Eingrenzung der Funktion $f(\sigma)$ führen.

Hönl und Papapetrou[3] haben in Anlehnung an Lubansky[14] gezeigt, worauf es zum korrespondenzmäßigen Verständnis des Elektronen-

[2] F. Bopp, Ann. Physik (5) **43**, 565 [1943].
[3] H. Hönl u. A. Papapetrou, Z. Physik **112**, 65 [1939]; **114**, 478 [1939]; **116**, 154 [1940].
[4] F. Bopp, Z. Naturforschg. **1**, 196 [1946]; vgl. Fiat-Review, Bd. 13, Kernphysik I, 1. Kapitel.
[5] F. Bopp, Ann. Physik (5) **38**, 345 [1940].
[6] E. C. G. Stueckelberg, Helv. physica Acta **14**, 51 [1941], hat noch vorher einen verwandten Ansatz vorgeschlagen.
[7] A. Landé u. L. H. Thomas, Physic. Rev. **60**, 121 [1941]; **60**, 514 [1941]; **65**, 175 [1944].
[8] B. Podolsky u. Ch. Kikuchi, Physic. Rev. **65**, 228 [1944].
[9] R. P. Feynman, A relativistical cut-off for classical electrodynamics, noch nicht publiziert; Hrn. Bethe danke ich herzlich für die Überlassung des Skriptums sowie für seine Diskussion der einschlägigen amerikanischen Arbeiten.
[10] W. Wessel, Z. Physik **92**, 407 [1934]; **110**, 625 [1938].
[11] F. Bopp, Z. Naturforschg. **1**, 53 [1946].
[12] H. Hönl, Z. Naturforschg. **2a**, 537 [1947].
[13] Diracs Finalbedingung zur Vermeidung der Selbstbeschleunigung gibt m. E. keine Lösung des Problems, wie das Beispiel der Potentialschwelle zeigt (vgl. Anm. 2, S. 596).
[14] Lubansky, Acta physic. polon. **6**, 356 [1937].

spins ankommt. Sie deuten die Schrödingersche Zitterbewegung als Folge eines Auseinanderfallens von Ladungs- und Massenmittelpunkt und beschreiben dies formal durch die Annahme eines der Elektronenmasse sich überlagernden Massendipols. Wessel[15] hat seit vielen Jahren versucht, einerseits von der Strahlungskraft, andererseits von der Diracschen Wellengleichung herkommend, die Feldbedeutung des Spins immer enger einzugrenzen. Erst die von Dirac[1] gegebene scharfe Trennung zwischen Trägheits- und Strahlungsfeld ermöglicht m. E. die hypothesenfreie Formulierung des Wesselschen Gedankens. Denn nicht die Ausstrahlung, sondern das Trägheitsfeld bestimmt die Spineigenschaften. Die fluktuierende Feldenergie in Partikelnähe — also quantenmechanisch die Energie der Emissions-Absorptionsprozesse — sorgt für die Trennung von Ladungs- und Energiemittelpunkt, die Hönl und Papapetrou voraussetzen. In erster Näherung ergeben sich genau deren Pol-Dipolteilchen.

2. Ableitung der feldmechanischen Bewegungsgleichung

Wenn man sich auf die Betrachtung stationärer Zustände beschränkt, kann man die von der Ausstrahlung herrührenden Reaktionskräfte weglassen. Daraus folgt, daß wir bei der Berechnung der Lorentz-Kraft von der symmetrischen Kombination

$$\varphi_\mu = \frac{1}{2}\left(\varphi_\mu^{\text{ret}} + \varphi_\mu^{\text{av}}\right) \tag{7a}$$

der retardierten und avancierten Potentiale auszugehen haben. Es sei ausdrücklich betont, daß diese Beschränkung rein methodisch ist und nichts mit den prinzipiellen Überlegungen von Eliezer[16] oder von Wheeler und Feynman[17] zu tun hat. Wenn man von der Notwendigkeit eines verallgemeinerten Potentialansatzes im Sinne von Gl. (1) überzeugt ist — sowohl die Frage der Endlichkeit der Ruhmasse als auch die der Massenstabilität sprechen dafür —, gibt es m. E. keinen Grund, der zur Aufgabe der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung zwingt. Selbstverständlich werden von dieser Feststellung die schönen Sätze über die mathematische Äquivalenz retardierter und avancierter Potentiale in vollständig absorbierenden Systemen nicht berührt. Wenn man von vornherein voraussetzt, daß es nur Zustrahlung gibt, verschwindet natürlich die von der Ausstrahlung herrührende Kraft.

Im vorliegenden Falle betrachten wir überhaupt nur ein einziges Elektron in einem vorgegebenen äußeren Feld. Ohne Ausstrahlung ist die resultierende Bewegungsgleichung aus einem Variationsprinzip ableitbar, das bereits Born[18] angegeben hat. Es ergibt sich aus der Lagrange-Funktion für die Feldgleichungen, wenn man die Potentiale aus Gl. (1) einsetzt und nachher nicht mehr nach dem Feld, sondern nach den Parametern der Bewegung variiert.

In unserem Fall erhält man[2] mit $\dot{z}_\alpha = u_\alpha$:

$$\delta \int L_0\, ds = 0,$$

$$L_0 = \frac{e^2}{c^3} \int u_\alpha(s)\, u_\alpha(s-\tau)\, f(\sigma)\, d\tau - \frac{e}{c}\, u_\alpha(s)\, \varphi_\alpha(z). \tag{8}$$

Darin ist

$$\sigma = \frac{1}{c^2}\left(z_\alpha(s) - z_\alpha(s-\tau)\right)^2. \tag{9}$$

In erster Näherung liefert das natürlich die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen.

Eine genaue Diskussion der aus Gl. (8) folgenden Bewegungsgleichungen liegt noch nicht vor. Zwei Grenzfälle sind bisher behandelt. Da sich die Masseninstabilität bereits in nichtrelativistischer Näherung zeigt, kann man fragen, was sich in nichtrelativistischer Näherung bei vollständiger Berücksichtigung der Retardierung ergibt. Man erhält so die Bedingung für massenstabile Ansätze[2,11] der Funktion $f(\sigma)$. Diese Näherung ist aber sicher zur quantitativen Behandlung praktischer Probleme ungeeignet. Denn wegen der großen Zittergeschwindigkeit — nach der Diracschen Wellengleichung ist sie gleich der Lichtgeschwindigkeit — liegt eigentlich immer der relativistische Grenzfall vor[18a]. Es ist darum zweckmäßig, streng relativistisch zu rechnen, in der Entwicklung nach der Retardierung aber nur

[15] W. Wessel, Z. Naturforschg. **1**, 622 [1946].
[16] C. J. Eliezer, Rev. mod. Physics **19**, 147 [1947].
[17] J. A. Wheeler u. R. P. Feynman, Rev. mod. Physics **17**, 157 [1945].
[18] M. Born, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **143**, 410 [1933/34].

[18a] Anm. b. d. Korrektur. Nach neueren Untersuchungen kann man die Frage, ob $v = c$ oder $v \neq c$ ist, nicht allein von der Dirac-Gleichung her entscheiden (vgl. Anm. 24).

einen Schritt weiter zu gehen als gewöhnlich[19]. Mit Rücksicht auf

$$u_a(s)\,u_a(s-\tau) = u_a\left(u_a - \tau\,\dot u_a + \frac{\tau^2}{2}\,\ddot u_a \ldots\right) = -c^2\left(1 + \frac{\tau^2}{2\,c^2}\,\dot u_a^2 \ldots\right)$$

und

$$\sigma = \frac{1}{c^2}\left(z_a(s) - z_a(s-\tau)\right)^2 = \frac{\tau^2}{c^2}\left(u_a - \frac{\tau}{2}\,\dot u_a + \frac{\tau^2}{6}\,\ddot u_a \ldots\right)^2 = -\tau^2 - \frac{\tau^4}{12\,c^2}\,\dot u_a^2 \ldots$$

erhält man nach Gl. (8) mit der dimensionslosen Abkürzung

$$Q = \frac{l^2}{c^4}\,\dot u_a^2\,, \tag{10}$$

in der l ein willkürlicher, passend zu wählender Längenfaktor ist, die Lagrange-Funktion

$$L_0 = -\frac{e^2}{c}\int\left(1 + \frac{c^2\,\tau^2}{2\,l^2}\,Q\right) f\left(-\tau^2 - \frac{c^2\,\tau^4}{12\,l^2}\,Q\right) d\tau - \frac{e}{c}\,u_a\,\varphi_a\,.$$

Darin ist der erste Ausdruck nichts anderes als eine mit dem Ansatz von $f(\sigma)$ variierende Funktion von Q. Wir können also

$$L_0 = -m_0\,c^2\,F(Q) - \frac{e}{c}\,u_a\,\varphi_a \tag{11}$$

setzen. Es bedeutet:

$$F(Q) = \frac{e^2}{m_0\,c^3}\int\left(1 + \frac{c^2\,\tau^2}{2\,l^2}\,Q\right) f\left(-\tau^2 - \frac{c^2\,\tau^4}{12\,l^2}\,Q\right) d\tau\,. \tag{12}$$

Statt den Einfluß von $f(\sigma)$ zu studieren, kann man sofort $F(Q)$ untersuchen. Gl. (11) stimmt mit der Lagrange-Funktion für das Hönl-Papapetrousche Pol-Dipolteilchen überein.

Im folgenden wird die Eigenzeit ein wenig geeigneter Parameter sein. Wir benützen darum weiterhin die Koordinatenzeit. In diesem Falle lautet das Variationsprinzip $\delta \int L\,dt = 0$, und die Lagrange-Funktion nimmt folgende Form an ($\beta = v/c$):

$$L = -m_0\,c^2\,F(Q)\sqrt{1-\beta^2} + e\,\varphi - \frac{e}{c}\,(\mathfrak{v}\,\mathfrak{A})\,;$$

$$Q = \frac{l^2/c^4}{\sqrt[4]{1-\beta^2}}\left\{\dot{\mathfrak{v}}^2 + \left(\frac{\mathfrak{v}\,\dot{\mathfrak{v}}}{c\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2\right\}. \tag{13}$$

Wir werden alsbald sehen, daß die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ der Zittergeschwindigkeit in der Diracschen Wellengleichung entspricht. Von allen Autoren ist bisher in Beispielen stillschweigend die Voraussetzung gemacht worden, daß diese auch in der korrespondierenden klassischen Theorie gleich oder nahezu gleich der des Lichtes sein muß.

Weyssenhoff und Raabe[20] haben neuerdings darauf hingewiesen, daß es zu beträchtlichen Vereinfachungen führt, wenn man dies von vornherein berücksichtigt. Im folgenden scheint sich daraus sogar ein bestimmter Ansatz für die Funktion $F(Q)$ in Gl. (13) zu ergeben. Wenn anders der Massenterm in Gl. (13) für $|\mathfrak{v}| = c$, d. h. für $\beta = 1$, nicht verschwinden oder divergieren soll, muß

$$F(Q) = \sqrt[4]{Q} \tag{14}$$

sein. Ein möglicher willkürlicher Faktor steckt bereits als unbestimmter Längenfaktor l in der Definitionsgleichung (10) von Q. Er wird am Ende durch die Dirac-Gleichung geeicht werden. Natürlich können noch Glieder hinzukommen, die für $\beta \to 1$ verschwinden. Solange wir nur die Lösungen $\beta = 1$ betrachten, sind sie ohne Bedeutung. Nach Gl. (14) ist

$$L = -m_0\,c\sqrt{l}\,\sqrt[4]{\dot{\mathfrak{v}}^2 + \left(\frac{\mathfrak{v}\,\dot{\mathfrak{v}}}{c\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2} + e\,\varphi - \frac{e}{c}\,(\mathfrak{v}\,\mathfrak{A})\,. \tag{15}$$

[19] F. Bopp, Massenspektrum der Elementarteilchen, vgl. Anm. 4, Z. Physik, im Druck (seit Dez. 1947).

[20] J. Weyssenhoff u. A. Raabe, Acta physica polon. 9, 7—53 [1947].

Obwohl in der obigen Lagrange-Funktion Retardierungseffekte wenigstens in erster Näherung enthalten sind — in der Quantentheorie der Wellenfelder entsprechen ihnen Emissions-Reabsorptionsprozesse —, tritt das Feld nicht mehr explizit in Erscheinung. Das hat zur Folge, daß die Quantelung ohne Divergenzschwierigkeiten möglich ist. Die klassischen sind durch den Ansatz in Gl. (1) beseitigt. Quantenmechanisch treten keine auf[21], obwohl die gewöhnliche Behandlung der Emissions-Reabsorptionsprozesse zu divergenten Ergebnissen führt.

Da die Lagrange-Funktion (15) von der Beschleunigung abhängt, treten in der kanonischen Darstellung Ort $\mathfrak{r}$ und Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ als unabhängige Variable auf. Für die zugehörigen kanonisch konjugierten Variablen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{s}$ gilt:

$$\mathfrak{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{v}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathfrak{v}}}, \qquad \mathfrak{s} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathfrak{v}}}.$$

Die Hamilton-Funktion erhält man aus

$$H = \mathfrak{v}\,\mathfrak{p} + \dot{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{s} - L(\mathfrak{r}, \mathfrak{v}, \dot{\mathfrak{v}})$$

nach Elimination von $\dot{\mathfrak{v}}$. Aus $\mathfrak{s} = \partial L / \partial \dot{\mathfrak{v}}$ folgt:

$$\dot{\mathfrak{v}} = -\frac{m_0^2 c^2 l}{4}\,\frac{\mathfrak{s} - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{s})\,\mathfrak{v}}{\sqrt{\mathfrak{s}^2 - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{s})^2}},$$

$$\dot{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{s} = \frac{-m_0^2 c^2 l/4}{\sqrt{\mathfrak{s}^2 - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{s})^2}},$$

so daß sich explizit als Hamilton-Funktion ergibt:

$$H = -e\varphi + \left(\mathfrak{v}, \mathfrak{p} + \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right) + \frac{m_0^2 c^2 l}{4\sqrt{\mathfrak{s}^2 - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{s})^2}}. \tag{16}$$

Aus der Hamiltonschen Gleichung für $\mathfrak{v}$

$$\dot{\mathfrak{v}} = \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{s}} = -\frac{m_0^2 c^3 l/4}{\sqrt{\mathfrak{s}^2 - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{s})^2}}\left\{\mathfrak{s} - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{s})\,\mathfrak{v}\right\} \tag{17}$$

folgt sofort, daß $|\mathfrak{v}| = c$ ein Integral der Bewegung ist. Wir wollen weiterhin allein diese Lösungen betrachten, woraus sich $\mathfrak{s}^2 - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{s})^2 = \frac{1}{c^2}(\mathfrak{v} \times \mathfrak{s})^2$ ergibt.

[21] Das stimmt mit den Ergebnissen von R. P. Feynman überein in „Relativistic cut-off for quantum electrodynamics" (Skriptum, Anm. 9, 19).

Auf die Verwandtschaft von Gl. (16) mit der Diracschen Wellengleichung ist wiederholt hingewiesen worden. Insbesondere ist, wie in der Diracschen Wellengleichung, zwischen der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und dem Impuls $\mathfrak{p}$ zu unterscheiden. Im kräftefreien Fall ist $\mathfrak{p} = \text{const}$; $\mathfrak{p}$ ist also der Makroimpuls. Dagegen kann $\mathfrak{v}$ nach Gl. (17) niemals konstant sein, auch nicht für makrophysikalisch ruhende Teilchen. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ist also die die Zitterbewegung beschreibende Mikrogeschwindigkeit. Die zu $\mathfrak{v}$ kanonisch konjugierte Größe $\mathfrak{s}$ erscheint bei Hönl als Massendipolmoment. Sie beschreibt offenbar das Auseinanderfallen von Ladungs- und Energiemittelpunkt.

Nach vollzogenem Übergang zur kanonischen Darstellung kehren wir zur Viererschreibweise zurück. Es wäre möglich und formal sehr elegant, von vornherein eine kanonische Darstellung in R_4 zu wählen. Das würde aber eine Reihe von Anmerkungen nötig machen, die nur durch den Formalismus bedingt sind und keine physikalische Bedeutung haben. Setzen wir $(\varphi_\mu) = (\varphi_1 \ldots \varphi_4) = (\mathfrak{A}, i\varphi)$ und $(p_\mu) = (p_1 \ldots p_4) = (\mathfrak{p}, iE/c)$, so folgt aus Gl. (16) nach Multiplikation mit $4\,|\mathfrak{v} \times \mathfrak{s}| / m_0 c l$

$$K = \left(g_\alpha, p_\alpha + \frac{e}{c}\varphi_\alpha\right) + m_0 c^2 = 0. \tag{18}$$

Darin ist

$$(g_\alpha) = \frac{4}{m_0 c l}\,|\mathfrak{v} \times \mathfrak{s}| \cdot (\mathfrak{v}, ic). \tag{19}$$

Die g_α entsprechen in Gl. (18) ganz den Diracschen Matrizen. Aber es sind Funktionen der kanonischen Variablen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{s}$.

3. Der Übergang zur Wellengleichung

Der formale Übergang zur Wellengleichung ist nicht schwierig. Bezüglich der Variabeln x_α und p_α kann man ganz und gar in herkömmlicher Weise verfahren. Wir betrachten die x_α als c-Zahlen, und für p_α setzen wir die Schrödingerschen Operatoren

$$p_\alpha = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}. \tag{20}$$

Auch bezüglich $(\mathfrak{v}, \mathfrak{s})$ könnten wir analog vorgehen und haben das früher gelegentlich getan.

Auf diese Weise erhält man eine Wellengleichung für eine Funktion $\psi(x_a, \mathfrak{v})$. Diese Wellengleichung enthält sozusagen innere Freiheitsgrade des Elektrons. Sie bleiben auch für kräftefreie ($\varphi_a = 0$), makrophysikalische ruhende Teilchen ($\mathfrak{p} = 0$) übrig und geben im allgemeinen ein ganzes Massenspektrum von Ruhenergien. Die zu den verschiedenen Energiewerten gehörenden Zustände der ruhenden Teilchen können sich außerdem noch in einem von der Zitterbewegung herrührenden spinartigen Impulsmoment unterscheiden[4,19]. Allerdings sind die Werte des Spins ganzzahlig. Man kann jedoch zeigen, daß die Schrödingersche Operatorendarstellung für die kanonischen Variablen $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{s}$ nicht die allgemeinste ist. Es gibt spinorartige Ansätze dafür, die dann selbstverständlich auch halbzahlige Spinwerte ermöglichen.

Ehe wir das tun, sei noch eine Bemerkung über die vorliegende Methode der Quantelung vorausgeschickt. In der Quantentheorie der Wellenfelder geht man gewöhnlich von einer kanonischen Darstellung der Wellengleichung aus, in der die Fourier-Amplituden der Wellen als kanonische Variable erscheinen. Hier wird mindestens der Trägheitsteil der Wellenfelder durch die Bahnparameter des erzeugenden Teilchens definiert. Er ist dadurch eindeutig bestimmt. Darin liegt eine doppelte Abänderung der gewöhnlichen Methode. Erstens haben wir implizit eine Variablentransformation durchgeführt. Da auch die neue Darstellung kanonisch ist, muß es sich um eine kanonische Transformation handeln. Es ist zu beachten, daß daraus eine merkliche Änderung der physikalischen Ergebnisse folgen kann, weil zwar die Vertauschungsrelationen der Quantenmechanik kanonisch invariant sind, nicht aber die Wellengleichungen. Wenn man etwa ein gewöhnliches mechanisches Problem, z. B. den Oszillator oder den Rotator, vor der Quantelung statt in Orts- und Impulskoordinaten in Wirkungs- und Winkelvariablen darstellt, so erhält man nicht die Schrödingerschen Eigenwerte, sondern in Strenge die der alten Bohrschen Theorie. Es gibt kein allgemeines Prinzip, um zu unterscheiden, welches die richtige Variabelnwahl ist. Darüber kann man nur die Erfahrung befragen. Die folgenden Ergebnisse dürften zeigen, daß jedenfalls die Teilchenparameter als Variable mit der Erfahrung bestens in Einklang zu bringen sind.

Diesem Vorzug der neuen Variabeln steht der Nachteil gegenüber, daß wir bisher nur die innere Zustrahlung und nicht die Ausstrahlung behandeln können. Wir kommen damit zu dem zweiten Punkt, in dem sich die vorliegende Methode von der konventionellen unterscheidet. Die innere Zustrahlung wird durch den Übergang zu den Partikelparametern ein quantenmechanisches Problem. Auch bisher bestand die Quantelung aus einem der Mechanik und einem der Strahlungstheorie angehörenden Teil. Es ist schon von anderer Seite darauf hingewiesen worden, daß der Schnitt zwischen Partikelenergie und Strahlungsenergie bisher an einer nicht Lorentz-invarianten Stelle liegt. Durch die Diracschen Betrachtungen über die retardierten und avancierten Potentiale wird die obige Grenzverschiebung zwischen Mechanik und Strahlungstheorie nahegelegt. Hier formulieren wir die *Quantentheorie der Feldmechanik*. Es müßte sich eine neue Form der Strahlungstheorie anschließen, eine *Quantentheorie der Ausstrahlung*. Die folgenden Ergebnisse der Quantentheorie der Feldmechanik dürften deren separate Untersuchung rechtfertigen. Programmatische Ansätze für eine Theorie der Ausstrahlung findet man bei Eliezer[16].

Kehren wir zur Operatordarstellung von $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{s}$ zurück! Daß die Schrödingersche Darstellung $\mathfrak{s} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}}$ nicht alle Möglichkeiten erfaßt, folgt daraus, daß die g_a in Gl. (19) nur von $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v} \times \mathfrak{s}$ abhängen. Der zweite Vektor ist von der Form eines Drehimpulsoperators, von dem man weiß, daß die Schrödingersche Darstellung nur ganzzahlige Eigenwerte liefert, während die Matrixdarstellung auch halbzahlige Werte zuläßt. Man sollte deshalb erwarten, daß es eine verallgemeinerte Darstellung der Operatoren gibt, die zwar zu denselben Vertauschungsrelationen führt wie die Schrödingersche, die aber auch halbzahlige Lösungen enthält. Den geeigneten Ausgangspunkt zum Studium der Vertauschungsrelationen bilden die Poisson-Klammern[15], die sich hier willkürfrei aus dem physikalischen Ansatz ergeben.

Wir berechnen die Poisson-Klammern für die Ausdrücke aus Gl. (19). Darin setzen wir $4/m_0 c l = 2\varrho/\hbar$. ϱ ist eine reine Zahl. Die Abspaltung des Faktors 2 ist bequem. Mit

$$g_0 = \frac{2\varrho}{\hbar} \, |\mathfrak{v} \times \mathfrak{s}| \tag{21}$$

ist

$$g_i = g_0 \, v_i, \qquad g_4 = i c g_0 . \tag{22}$$

Die Poisson-Klammern zweier Funktionen A und B der kanonischen Variabeln $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{s}$ sind durch die Gleichungen

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial \mathfrak{s}} \frac{\partial B}{\partial \mathfrak{v}} - \frac{\partial A}{\partial \mathfrak{v}} \frac{\partial B}{\partial \mathfrak{s}} \tag{23}$$

definiert. Es wird sich zeigen, daß die Poisson-Klammern der Funktionen g_α und

$$\{g_\alpha, g_\beta\} = g_{\alpha\beta} \tag{24}$$

ein in sich abgeschlossenes System bilden, derart, daß sich die Klammern von je zwei dieser Größen als Funktionen von g_α und $g_{\alpha\beta}$ darstellen lassen.

Die Grundformeln für die folgenden Rechnungen lauten, wie man leicht verifiziert:

$$\begin{aligned} \{g_0, v_i\} &= \frac{2\varrho}{\hbar} \frac{1}{|\mathfrak{v} \times \mathfrak{s}|} \left(\mathfrak{v}^2 s_i - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{s})\, v_i\right); \\ \{g_0, s_i\} &= -\frac{2\varrho}{\hbar} \frac{1}{|\mathfrak{v} \times \mathfrak{s}|} \left(\mathfrak{s}^2 v_i - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{s})\, s_i\right). \end{aligned} \tag{25}$$

Daraus folgt einerseits

$$\{g_0, \mathfrak{v}^2\} = \{g_0, \mathfrak{v}\,\mathfrak{s}\} = \{g_0, \mathfrak{s}^2\} = 0; \tag{26}$$

andererseits ist

$$\begin{aligned} g_{4i} &= ic\{g_0, g_i\} = \frac{4i\varrho^2 c}{\hbar^2} \left(\mathfrak{v}^2 s_i - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{s})\, v_i\right); \\ g_{ik} &= \{g_i, g_k\} = \frac{4\varrho^2 \mathfrak{v}^2}{\hbar^2} (v_i s_k - v_k s_i). \end{aligned} \tag{27}$$

Letzteres ergibt sich aus

$$\{g_i, g_k\} = \{g_0 v_i, g_0 v_k\} = \frac{1}{ic} (v_i g_{4k} - v_k g_{4i}).$$

Die übrigen Poisson-Klammern lauten:

$$\begin{aligned} \{g_{\alpha\beta}, g_\gamma\} &= \frac{4\varrho^2 c^2}{\hbar^2} (g_\alpha \delta_{\beta\gamma} - g_\beta \delta_{\alpha\gamma}); \\ \{g_{\alpha\beta}, g_{\mu\nu}\} &= \frac{4\varrho^2 c^2}{\hbar^2} (g_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu} - g_{\beta\nu} \delta_{\alpha\mu} - g_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} + g_{\beta\mu} \delta_{\alpha\nu}). \end{aligned} \tag{28}$$

Die letzten Gleichungen folgen rein algebraisch aus

$$\{g_{\alpha\beta}, g_{\mu\nu}\} = \left\{g_{\alpha\beta}, \{g_\mu, g_\nu\}\right\} = \left\{\{g_{\alpha\beta}, g_\mu\}, g_\nu\right\} - \left\{\{g_{\alpha\beta}, g_\nu\} g_\mu\right\}.$$

In den ersten ist $v = c$ gesetzt[22].

In der Quantenmechanik treten die Vertauschungsrelationen an die Stelle der Poisson-Klammern. Es besteht folgende Korrespondenz:

$$\{s_i, v_k\} = \delta_{ik} \rightarrow [s_i, v_k] = \frac{\hbar}{i} \delta_{ik}.$$

An die Stelle einer Gleichung mit der Poisson-Klammer

$$\{A, B\} = C$$

tritt also die Vertauschungsrelation

$$[A, B] = \frac{\hbar}{i} C.$$

Aus den Relationen (24) und (28) folgt danach

$$\begin{aligned} [g_\alpha, g_\beta] &= \frac{\hbar}{i} g_{\alpha\beta}, \\ [g_{\alpha\beta}, g_\gamma] &= \frac{4\varrho^2 c^2}{i\hbar} (g_\alpha \delta_{\beta\gamma} - g_\beta \delta_{\alpha\gamma}), \\ [g_{\alpha\beta}, g_{\mu\nu}] &= \frac{4\varrho^2 c^2}{i\hbar} (g_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu} - g_{\beta\nu} \delta_{\alpha\mu} - g_{\alpha\mu} \delta_{\beta\gamma} + g_{\beta\mu} \delta_{\alpha\nu}). \end{aligned} \tag{29}$$

[22] Die Gln. (24) und (28) gelten übrigens auch für $v \neq c$, falls $g_0 = \frac{2\varrho c}{\hbar} \sqrt{\mathfrak{s}^2 - \frac{1}{c^2} (\mathfrak{v}\,\mathfrak{s})^2}$ ist.

Diese Vertauschungsrelationen kann man in folgender Weise realisieren. Es seien $\xi = (\xi_1 \ldots \xi_4)$ und $\xi^* = (\xi_1^* \ldots \xi_4^*)$ spinorartige Variabeln, die an die Stelle der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ treten. Die Ableitungen bezeichnen wir mit

$$\eta = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \xi^*}, \qquad \eta^* = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \xi}. \tag{30}$$

Wir bilden mit den Diracschen Matrizen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ die Operatoren

$$\Gamma_\alpha = \frac{1}{2} (\xi^* \gamma_4 \gamma_\alpha \gamma_4 \eta + \eta^* \gamma_\alpha \xi) \tag{31}$$

und für $\alpha \neq \beta$

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\xi^* \gamma_4 \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_4 \eta - \eta^* \gamma_\alpha \gamma_\beta \xi). \tag{32}$$

Sie genügen folgenden Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] &= \frac{\hbar}{i} \Gamma_{\alpha\beta}; \\ [\Gamma_{\alpha\beta}, \Gamma_\gamma] &= \frac{\hbar}{i} (\Gamma_\alpha \delta_{\beta\gamma} - \Gamma_\beta \delta_{\alpha\gamma}); \\ [\Gamma_{\alpha\beta}, \Gamma_{\mu\nu}] &= \frac{\hbar}{i} (\Gamma_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu} - \Gamma_{\beta\nu} \delta_{\alpha\mu} - \Gamma_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} + \Gamma_{\beta\mu} \delta_{\alpha\nu}). \end{aligned} \tag{33}$$

Diese stimmen bis auf Faktoren mit denen in Gl. (29) überein. Wir haben vollends Identität, wenn wir

$$g_\alpha = \frac{2 \varrho c}{\hbar} \Gamma_\alpha, \qquad g_{\alpha\beta} = \frac{4 \varrho^2 c^2}{\hbar^2} \Gamma_{\alpha\beta} \tag{34}$$

setzen. Die durch die Gln. (31) und (34) definierten Größen g_α stimmen also korrespondenzmäßig mit den Funktionen in Gl. (19) überein.

Setzen wir diese Operatoren und die aus Gl. (20) in Gl. (18) ein, so ergibt sich nach Division durch c als *Wellengleichung der Feldmechanik*

$$\left\{ \frac{\varrho}{\hbar} (\xi^* \gamma_\alpha P_\alpha^\dagger \eta - \eta^* \gamma_\alpha P_\alpha \xi) - m_0 c \right\} \Psi(x, \xi, \xi^*) = 0. \tag{5}$$

Darin bedeutet

$$P_\alpha = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{e}{c} \varphi_\alpha, \qquad P_\alpha^\dagger = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^*} + \frac{e}{c} \varphi_\alpha^*, \tag{36}$$

und die Wellenfunktion hängt außer von x_α noch von den Spinorvariabeln ξ und ξ^* ab. Nehmen wir speziell an, daß sie von ξ^* linear und von ξ überhaupt nicht abhängt, setzen wir also

$$\Psi = \xi^* \gamma_4 \psi(x), \tag{37}$$

so folgt, wenn wir für den noch unbestimmten Zahlenfaktor $\varrho = 1$ schreiben,

$$\xi^* \{ i \gamma_4 \gamma_\alpha P_\alpha + m_0 c \gamma_4 \} \psi(x) = 0,$$

oder (etwa durch Ableitung nach ξ^*) die Diracsche Wellengleichung

$$\{ \gamma_\alpha P_\alpha - i m_0 c \} \psi(x) = 0. \tag{38}$$

Die Diracsche Wellengleichung liefert also spezielle Lösungen der allgemeinen Wellengleichung der Feldmechanik in Gl. (35), die mit $\varrho = 1$ folgende Gestalt annimmt:

$$\{\xi^* \gamma_\alpha P_\alpha^\dagger \eta - \eta^* \gamma_\alpha P_\alpha \xi - \hbar\, m_0\, c\}\, \Psi(x, \xi, \xi^*) = 0\,. \tag{39}$$

Da $\xi^* \eta$ und $\eta^* \xi$ mit dem Operator der Wellengleichung vertauschbar sind, erhält man als partikuläre Lösungen der Gleichungen die homogenen Funktionen in ξ und ξ^*. Der zur Dirac-Gleichung führende spezielle Ansatz in Gl. (37) ist von dieser Art. Es ist zu erwarten, daß die homogenen Funktionen höheren Grades zu Wellengleichungen für Teilchen mit höherem Spin führen. Untersuchungen darüber sind im Gange[23].

Es ist bemerkenswert, daß sich die Dirac-Gleichung nur für den speziellen Ansatz $F(Q) = \sqrt[4]{Q}$ in Gl. (14) ergibt[24]. Das bedeutet allerdings nicht, daß der Elektronenspin nur aus einer eindeutig bestimmten Struktur des Elektrons folgen würde. Wenn wir annähmen, Gl. (14) gelte für alle Werte von Q, dann würde daraus zwar eine bestimmte Funktion $f(\sigma)$ folgen. Diese widerspräche aber anderen Erfahrungen. Tatsächlich reicht die Dirac-Gleichung nur aus, um Gl. (14) für extreme Zittergeschwindigkeiten zu garantieren, d. h. nur asymptotisch für $Q \to \infty$. In diesem Grenzfall folgt aus Gl. (12)

$$F(Q) \to -\frac{e_2}{2\, m_0\, e\, l^2}\, Q \int f\left(-\frac{c^2 Q}{12\, l^2}\, \tau^4\right) \tau^2\, d\tau\,,$$

oder, wenn wir $-\dfrac{c^2 Q}{12\, l^2}\, \tau^4 = \sigma\,, \quad \tau = \sqrt[4]{\dfrac{12\, l^2}{c^2 Q}}\, \sqrt[4]{-\sigma}$ setzen:

$$F(Q) = \frac{3}{2}\, \frac{e^2}{m_0\, c^3}\, \sqrt[4]{\frac{c^2}{12\, l^2}} \int \frac{f(\sigma)\, d\sigma}{\sqrt[4]{-\sigma}}\, \sqrt[4]{Q}\,.$$

Wir kommen also asymptotisch zu Gl. (14):

$$F(Q) = \sqrt[4]{Q}\,,$$

wenn wir $f(\sigma)$ so wählen, daß

$$\int \frac{f(\sigma)\, d\sigma}{\sqrt[4]{-\sigma}} = \frac{2}{3}\, \frac{m_0\, c^3}{e^2}\, \sqrt[4]{\frac{12\, l^2}{c^2}} \tag{40}$$

ist. Die Vergleichung mit früheren Ergebnissen[2] wird erleichtert, wenn wir $\sigma = -\xi^2$, $f(-\xi^2) = g(\xi)$ setzen. Beachten wir noch, daß $l = \dfrac{2\,\hbar}{m_0\, c}$ ist, und wählen wir die Einheiten $e = 1$, $c = 1$, $m_0 = 1$ und $\hbar = 137$, so lautet Gl. (40)

$$\int g(\xi) \sqrt{\xi}\, d\xi = \frac{4}{3} \sqrt{\hbar \sqrt{3}} = 20{,}56\,. \tag{41}$$

Daneben gilt [Anm. 2, Gl. (2)]: $\int f(\sigma)\, d\sigma = 1$, d. h.

$$\int g(\xi)\, \xi\, d\xi = \frac{1}{2}\,. \tag{42}$$

In Lorentzscher Näherung gilt Gl. (42) ebenfalls. An Stelle von Gl. (41) erhält man jedoch [Anm. 2, Gl. (60)]:

$$\int g(\xi)\, d\xi = 1\,.$$

Man könnte daran denken, daß diese Bedingung neben den Gln. (41) und (42) weiter besteht. Das ist aber physikalisch nicht sinnvoll. Gl. (41) gilt für *extreme* Zittergeschwindigkeiten, die Lorentzsche Näherung für *vernachlässigbare*. Für das Elektron hat man zweifellos nicht von der Lorentzschen, sondern von der Hönl-Papapetrouschen Gleichung auszugehen. Wenn man g, um den Anschluß an die Diracsche Wellengleichung zu gewinnen, gemäß den Gln. (41) und (42) bestimmt, so liefert also das Integral

$$M_0 = \int g(\xi)\, d\xi + 1\,, \tag{43}$$

das im allgemeinen von $m_0 = 1$ verschieden sein wird, die Masse des Teilchens im Grenzfall kleiner Zittergeschwindigkeit. Setzen wir zur ersten Abschätzung $g(\xi) = \begin{cases} g_0 & \text{für } \xi \leq \xi_0 \\ 0 & \text{für } \xi > \xi_0 \end{cases}$, so folgt aus den Gln. (41) und (42) bzw.

$$\frac{2}{3}\, g_0\, \xi_0^{3/2} = 20{,}56\,; \qquad \frac{1}{2}\, g_0\, \xi^2 = \frac{1}{2}\,;$$

[23] Anm. b. d. Korrektur. Diese Vermutung hat sich inzwischen bestätigt.

[24] Anm. b. d. Korrektur. Die Frage nach dem Einfluß von $F(Q)$ wird demnächst ausführlich behandelt. Es ist sehr überraschend, daß man auch für $v \neq c$ neben anderen Lösungen die Dirac-Gleichung erhält.

also

$$g_0 = A^4, \qquad \xi_0 = \frac{1}{A^2}, \qquad (A = 30{,}84)$$

und

$$M_0 = g_0\,\xi_0 = A^2 = 951 .$$

Die Lösungen mit kleiner Zittergeschwindigkeit ergeben also schwerere Teilchen: Mesonen oder Protonen. Wir gewinnen mit dieser qualitativen Betrachtung den Anschluß an unsere frühere Diskussion[3,4,19] des Massenspektrums der Elementarteilchen. Die in der Dirac-Gleichung enthaltenen Strukturaussagen werden durch Gl. (41) vollständig erfaßt. Danach kann der Elektronenradius offenbar um Größenordnungen kleiner sein als der klassische Lorentzsche. Vielleicht kann M_0 sogar unendlich werden[25]. Wie es sich damit verhält, hängt von dem Verlauf von $F(Q)$ für kleine Q ab. Die Bestimmung dieser Funktion für mäßige Argumentwerte setzt Erfahrungen voraus, die über den Inhalt der Dirac-Gleichung hinausgehen und die an anderer Stelle behandelt werden sollen.

[25] Es verdient jedoch angemerkt zu werden, daß Diracs klassische Theorie des Elektrons gemäß dem Ansatz in Gl. (4) nicht mit der Diracschen Wellengleichung in Einklang ist, weil $\int g(\xi)\sqrt{\xi}\,d\xi$ divergiert.

Es ist mir eine ganz besondere Freude, diese Arbeit Hrn. Geheimrat A. Sommerfeld zu seinem 80. Geburtstag, am 5. Dezember 1948, zueignen zu können. Möge es uns vergönnt sein, uns seiner regen Anteilnahme am wissenschaftlichen Leben des Münchener Institutes noch lange zu erfreuen! Mögen dem Jubilar noch viele Jahre eines gesegneten Lebensabends beschieden sein!

Mechanik und Massenspektrum der Elementarteilchen

Von Helmut Hönl

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Freiburg i. Br.

(Z. Naturforschg. **3a**, 573—583 [1948]; eingegangen am 27. August 1948)

Herrn Geheimrat A. Sommerfeld in dankbarer Erinnerung an die Münchener Studienjahre zum 80. Geburtstag gewidmet.

1. Einführung und Zusammenfassung

H. A. Lorentz hat die These aufgestellt, daß es möglich sein müsse, die Mechanik des Elektrons — und damit im Prinzip *aller* Elementarteilchen — vollständig auf Elektrodynamik zurückzuführen. Der Durchführung des Lorentzschen Programms stellten sich aber eine Reihe von Schwierigkeiten entgegen, wie die unendliche Selbstenergie punktförmig angenommener Elementarteilchen, ferner der Elektronenspin und die von Dirac[1] und Wessel[2] hervorgehobene Selbstbeschleunigung des klassischen Punktelektrons. Während sich aber die unendliche Selbstenergie in der klassischen Theorie durch Erweiterung der Grundlagen der Maxwell-Lorentzschen Elektrodynamik nach den Arbeiten verschiedener Autoren[3] beseitigen läßt und die Selbstbeschleunigung als ein Hinweis auf die tatsächliche Instabilität von Elementarteilchen gedeutet werden kann (Mesonenzerfall)[4], hat sich der Elektronenspin lange Zeit als ein besonders hartnäckiges Hindernis für die konkrete Durchführung der Lorentzschen Theorie erwiesen. Erst neuerdings ist es Bopp[5] gelungen, den Elektronenspin in die Elektronentheorie konsequent einzubeziehen und als eine Art „Nebenbewegung" (oder „Zitterbewegung") des Elektronenortes zu verstehen.

Demgegenüber haben Papapetrou und der Verf.[6] schon vor längerer Zeit darauf hingewiesen, daß sich auch ganz unabhängig von der Elektrodynamik eine *Mechanik der Elementarteilchen*, speziell des Elektrons, begründen läßt. Es handelt sich dabei darum, die Mechanik des

[1] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **167**, 148 [1938].

[2] W. Wessel, Ann. Physik (5) **43**, 565 [1943].

[3] M. Born u. L. Infeld, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **144**, 425 [1934]; **147**, 522 [1934]; **150**, 465 [1935]; P. A. M. Dirac[1]; H. Hönl u. A. Papapetrou, Z. Physik **112**, 65 [1939].

[4] H. Hönl, Z. Naturforschg. **2a**, 537 [1947].

[5] F. Bopp, Ann. Physik (5) **42**, 572 [1943]; Z. Naturforschg. **1**, 53 [1946].

[6] H. Hönl u. A. Papapetrou, Z. Physik **112**, 512 [1939]; vgl. auch ebenda **114**, 478 [1939] u. **116**, 154 [1940].